

Aucun document n'est autorisé et le barème est purement indicatif. Ce qui est affirmé sans preuve pourra être nié sans preuve.

Exercice 1. (09 points)

1. **Montrer en utilisant la définition que** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+9}{3n-7} = \frac{2}{3}$ [2pts]
Soit $\varepsilon > 0$, trouvons $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n > N_\varepsilon \implies \left| \frac{2n+9}{3n-7} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon.$$

Supposons que $n > 3$, on a alors

$$\left| \frac{2n+9}{3n-7} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \iff \frac{34}{3(3n-7)} < \varepsilon \iff 3n-7 > \frac{34}{3\varepsilon} \iff n > \frac{1}{3} \left(\frac{34}{3\varepsilon} + 7 \right).$$

Prendre $N_\varepsilon = E \left[\frac{1}{3} \left(\frac{34}{3\varepsilon} + 7 \right) \right] + 1$.

2. **Pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$, **on pose** $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
a. **Montrer que** $(u_n)_{n \geq 1}$ **est une suite divergente.** [2pts]
On vérifie que

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$ donc la suite (u_n) n'est pas de Cauchy. Elle est donc divergente.

- b. **Pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$, **on pose** $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n$.

- i. **Montrer que, pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. [2pts]

On a $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Mais il est facile de voir que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- ii. **En déduire que, pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$: $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n} - 1$. [1pt]
Sachant que

$$2\sqrt{n} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2n - \sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}} = \frac{(2\sqrt{n} + 1)(\sqrt{n} - 1)}{\sqrt{n}} \geq 0$$

On en déduit le résultat demandé.

- iii. **Montrer que** $(v_n)_{n \geq 1}$ **est convergente et précisez sa limite.** [2pts]

On utilisant le résultat de la question 2. b. i., on écrit successivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &< 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) < \frac{1}{\sqrt{1}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &< 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{4}} &< 2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} &< 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) < \frac{1}{\sqrt{n-1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} &< 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

A droite on fait la somme (de k allant de 1 à n) et on obtient

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) \leq u_n$$

A gauche on fait la somme (de k allant de 1 à $n-1$) et on obtient

$$u_n - 1 < 2(\sqrt{n} - \sqrt{1}).$$

Ce qui nous permet d'avoir l'encadrement

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) < u_n < 2\sqrt{n} - \sqrt{1}$$

En divisant partout par $\sqrt{n}$ on obtient

$$\frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1})}{\sqrt{n}} < v_n < \frac{2\sqrt{n} - \sqrt{1}}{\sqrt{n}}.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 2$.

Exercice 2. (11 points)

1. Montrer en utilisant la définition que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5}{2x^2 + 2x + 1} = \frac{3}{2}$.

[1pt]

Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $A > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x \geq A \implies \left| \frac{3x^2 + 5}{2x^2 + 2x + 1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon.$$

Sans nuire à la généralité, supposons que $x > 100$, alors on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{3x^2 + 5}{2x^2 + 2x + 1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{6x - 7}{2(2x^2 + 2x + 1)} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{6x - 7}{2x^2 + 2x + 1} < 2\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{6x}{2x^2} < 2\varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{3}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre alors $A = \max \left\{ 100, \frac{3}{2\varepsilon} \right\}$.

2. On considère la fonction $f(x) = \frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x}$.

a. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 des fonctions $u(x) = \sin x$, $v(x) = \tan x$, $w(x) = \exp(x)$. [2pts]

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\exp(x) = 1 + x + o(x)$$

- b. Dédurre le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $f(x)$. [1pt]
On en déduit que

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= \exp(x) \exp\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= \exp(x) \left(1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\end{aligned}$$

Avec le même raisonnement on trouve

$$\exp(\tan(x)) = \exp(x) \left(1 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right).$$

Il vient que

$$\frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x} = \exp(x) \frac{-\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \exp(x) \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}.$$

- c. Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. [1pt]
On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

3. a. Rappeler le théorème des accroissements finis pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. [1pt]
Soit h une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$.
- b. Soit $f : [a, b] \rightarrow]0, +\infty[$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. En utilisant la fonction $g := \ln f$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que [2pts]

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp \left[\frac{f'(c)}{f(c)} (b - a) \right].$$

En utilisant le théorème de composition, on vérifie facilement que la fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $x \in]a, b[$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Pour $g(x) = \ln f(x)$, on obtient

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{\ln f(b) - \ln f(a)}{b - a},$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp \left[\frac{f'(c)}{f(c)} (b - a) \right].$$

4. a. Rappeler la formule de Leibniz pour la dérivée n -ième du produit de deux fonctions f et g . [1pt]
La formule de Leibniz s'écrit

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} g(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

- b. En utilisant la formule de Leibniz, calculer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = (x^3 + 3x + 1)e^{2x}$. [2pts]

$$\begin{aligned}
[(x^3 + 3x + 1)e^{2x}]^{(n)} &= \sum_{k=0}^3 C_n^k (x^3 + 3x + 1)^{(k)} (e^{2x})^{n-k} \\
&= \left(2^n (x^3 + 3x + 1) + 2^{n-1} n (3x + 3) + \frac{3n(n-1)}{2} 2^{n-2} x \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} 2^{n-2} \right) e^{2x}
\end{aligned}$$